براءة الأشقر

جامعة البعث
كليـة العلـوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2016 - 2017
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (45 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن اجتماع الزمرتين $4Z$ و $5Z$ يساوي الزمرة Z .

(2) إن $(Z_n , +)$ هي زمرة جزئية من الزمرة $(Z , +)$.

(3) مرتبة العنصر $(-i)$ في الزمرة $(C , +)$ تساوي 4 ، حيث C مجموعة الأعداد العقدية.

(4) رتبة الزمرة الجزئية المولدة بالعنصر 6 من الزمرة $(Z_8 , +)$ تساوي 3 .

(5) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1 , 14\}$ في الزمرة $U(15)$ يساوي 8 .

(6) إذا كان p عدداً أولياً فإن مرتبة زمرة اولر $U(p)$ يساوي p .

(7) إن العنصر a^6 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 21 .

(8) إذا كانت $(G, .)$ زمرة و $a \in G$ عنصراً مرتبته 12 فإن مرتبة العنصر a^5 في G تساوي 12.

(9) إن عدد عناصر زمرة الخارج $U(18)/U_3(18)$ يساوي 3 .

(10) إذا كانت الزمرة الجزئية $H = \{0, 2, 4, 6\}$ من الزمرة $(Z_8 , +)$ فإن زمرة الجداء المباشر $U(4) \oplus H$ تكون دوارة.

(11) إن $U(4) \oplus H \cong Z_8$ حيث $H = \{0, 2, 4, 6\}$ هي الزمرة الجزئية من الزمرة $(Z_8 , +)$.

(12) عدد الهومومورفيزمات (التشاكلات) الزمرية من الزمرة Z_{18} إلى الزمرة Z_{12} يساوي 3.

(13) كل زمرة من المرتبه 121 تكون تبديلية .

(14) رتبة العنصر $(4 , 5)$ من الزمرة $Z_{20} \oplus Z_{30}$ يساوي 60 .

(15) إن الزمرة $(U(15) , .)$ هي p- زمرة.

السؤال الثاني (40 درجة):

(1) اذكر نص مبرهنة لاغرانج ثم أثبت صحته .

(2) إذا كان $a , b \in G$ بحيث $a \cdot b \in Z(G)$ فإن $a . b = b . a$.

(3) لتكن $(G , .)$ زمرة و A, B زمرتين جزئيتين منها، أثبت أنه إذا كانت $A.B = <A\cup B>$ فإن $A.B = B.A$.

(4) إذا كانت مرتبة G تساوي pq حيث p, q عددان أوليان ليسا بالضرورة مختلفان، فإن مرتبة مركز الزمرة G $(Z(G))$ ، إما أن تساوي 1 أو تساوي pq .

(5) إذا كانت G منتهية و p- زمرة (p عدد أولي) فإن كلاً من $Z(G)$ و $G/Z(G)$ هي p- زمرة.

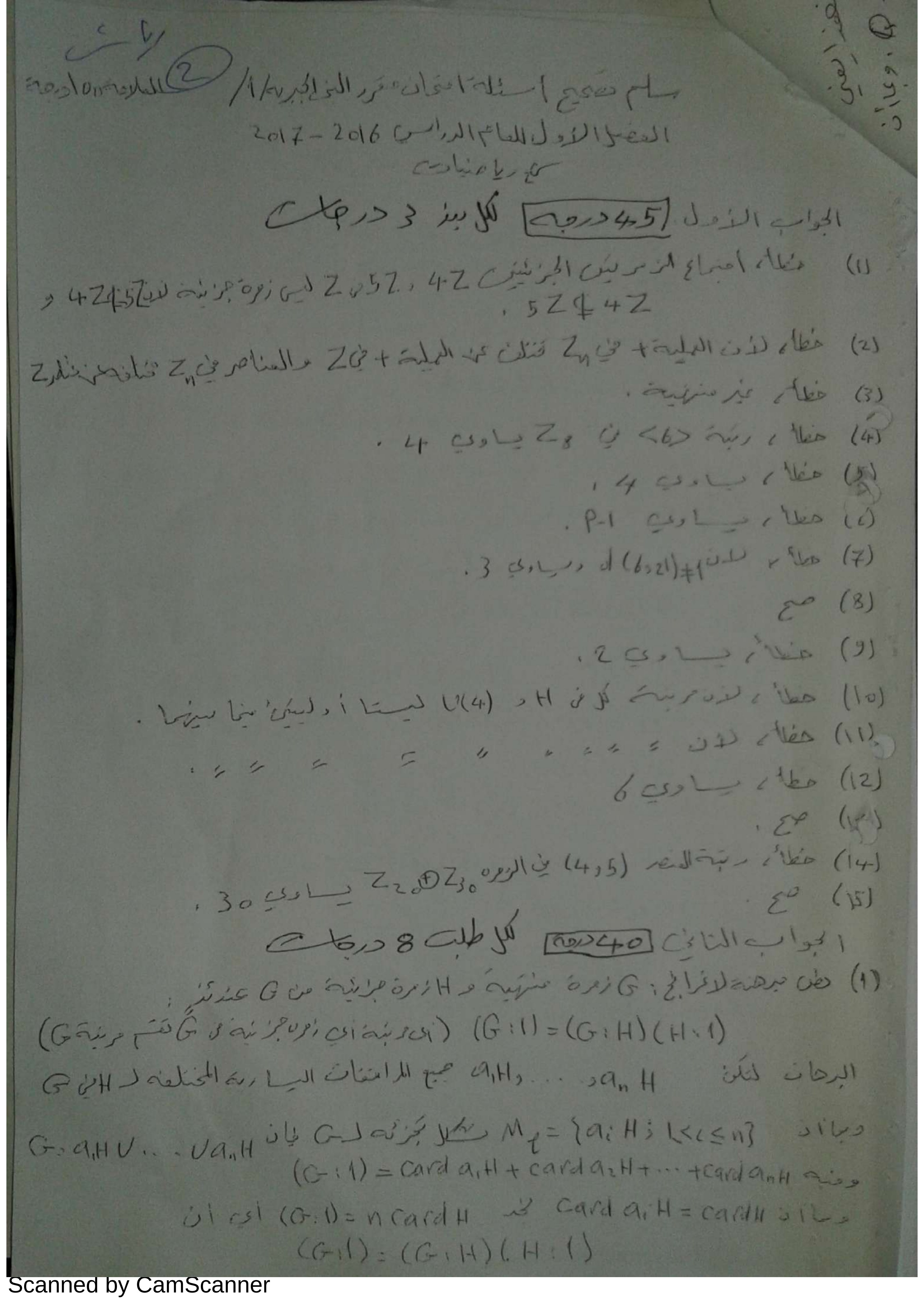
السؤال الثالث (15 درجة): لتكن $(G , .), (G` , .)$ زمرتين ما. أثبت صحة ما يلي:

(1) إذا كان $f: G \to G`$ تشاكلا زمرياً، فاثبت أن $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$.

(2) إذا كان f تشاكلاً للزمرة $(Q^* , .)$ في نفسها والمعرف بالشكل $f(x) = |x|$ حيث Q^* مجموعة الأعداد العادية (النسبية) المغايرة للصفر و(.) عملية الضرب العادي بالأعداد أوجد $\ker f$.

2017 - 2 - 5

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة



رياض

② العلامة من 100 درجة

سلم تصحيح أسئلة امتحان مقرر الجبر 1 / ج1

الفصل الأول للعام الدراسي 2016 - 2017

س2 رياضيات

الجواب الأول [45 درجة] لكل بند 3 درجات

(1) خطأ، اجتماع الزمرتين الجزئيتين $4Z$ ، $5Z$ من Z ليس زمرة جزئية لأن $4Z \not\subset 5Z$ و $5Z \not\subset 4Z$.

(2) خطأ، لأن العملية + في Z_n تختلف عن العملية + في Z والعناصر في Z_n تختلف عن نظائرها في Z

(3) خطأ، غير منتهية.

(4) خطأ، رتبة $<6>$ في Z_8 يساوي 4 .

(5) خطأ، يساوي 4 ،

(6) خطأ، يساوي $p-1$.

(7) خطأ، لأن $(6,21)\neq 1$ و d يساوي 3 .

(8) صح

(9) خطأ، يساوي 2 .

(10) خطأ، لأن رتبة كل من H و $U(4)$ ليستا أولية فيما بينهما .

(11) خطأ، لأن " " " " " " " " " "

(12) خطأ، يساوي 6

(13) صح .

(14) خطأ، رتبة العنصر $(4,5)$ في الزمرة $Z_2 \oplus Z_{30}$ يساوي 30 .

(15) صح .

الجواب الثاني [40 درجة] لكل طلب 8 درجات

(1) نص مبرهنة لاغرانج: G زمرة منتهية و H زمرة جزئية من G عندئذٍ:

$(G:1)=(G:H)(H:1)$ (أي رتبة أي زمرة جزئية من G تقسم رتبة G)

البرهان: لتكن $a_1H, \dots, a_nH$ جميع المرافقات اليسارية المختلفة لـ H في G

وبالتالي $M_l=\{a_iH;\ 1\le i\le n\}$ تشكل تجزئة لـ G بأن $G=a_1H\cup\dots\cup a_nH$

ومنه $(G:1)=card\,a_1H+card\,a_2H+\dots+card\,a_nH$

وبما أن $card\,a_iH=card\,H$ نجد $(G:1)=n\,card\,H$ أي أن

$(G:1)=(G:H)(H:1)$

بما أن $ab \in Z(G)$ فإنه $abx = xab$ لكل $x \in G$

حيث $a,b \in G$ و G زمرة فإن $b^{-1} \in G$ ومنه لما يكون $x = b^{-1}$ $abb^{-1} = b^{-1}ab$

$$\Rightarrow a = b^{-1}ab \Rightarrow \underline{ba} = bb^{-1}ab = \underline{ab}$$

(3) بما أن $AB = \langle A \cup B \rangle$ فإن AB زمرة جزئية من G .

ليكن $y \in AB$ عندئذ $y^{-1} \in AB$ ومنه $y^{-1} = ab$ حيث $a \in A, b \in B$ ومن ثم فإن $y = b^{-1}a^{-1} \in BA$ أي $AB \subseteq BA$.

ليكن $x \in BA$ عندئذ $x = cd$ حيث $c \in B, d \in A$ ومنه $x = (d^{-1}c^{-1})^{-1} \in AB$ لأن AB زمرة جزئية فرضاً ومنه $BA \subseteq AB$. مما سبق يكون $AB = BA$.

(4) $Z(G)$ زمرة جزئية من G عندئذ $(Z(G):1) \in \{1, p, q, pq\}$ حسب لاغرانج. ونميز ما يلي: 1- اذا كانت G تبديلية عندئذ $G = Z(G)$ ومنه $(Z(G):1) = pq$. 2- G ليست تبديلية عندئذ $(Z(G):1) \neq pq$ ؛ لنفرض $(Z(G):1) = p$ عندئذ $(G/Z(G):1) = q \Leftarrow \frac{G}{Z(G)}$ دوارة ومن ثم فإن الزمرة G تبديلية وهذا مرفوض فرضاً. كذلك الأمر عندما $(Z(G):1) = q$ ومنه $(Z(G):1) = 1$.

(5) G p-زمرة فإن أي زمرة جزئية منها p-زمرة ومنه $Z(G)$ p-زمرة لأن $Z(G)$ زمرة جزئية من G . وبما أن $Z(G)$ ناظمية في G فإن زمرة الخارج $\frac{G}{Z(G)}$ تكون p-زمرة أيضاً .

الجواب الثالث **15 درجة**

(1): لنعرف العلاقة $\varphi: G/\ker f \to Im f$ كما يلي $\varphi(g\ker f) = f(g)$; $\forall g\ker f \in G/\ker f$

نجد φ تطبيق متباين: فإن $\forall x\ker f, y\ker f \in G/\ker f$

$$x\ker f = y\ker f \Leftrightarrow (x^{-1}y)\ker f = \ker f \Leftrightarrow (x^{-1}y) \in \ker f \Leftrightarrow$$ (15)

$$f(x^{-1}y) = e' \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

و φ تشاكل لأن $\varphi[(x\ker f)(y\ker f)] = \varphi[(xy)\ker f] = f(xy) = f(x)f(y) = \varphi(x\ker f)\varphi(y\ker f)$

φ غامر: إذا كان $z \in Im f$ فإنه يوجد $x \in G$ حيث $f(x) = z$ ومنه $x\ker f \in G/\ker f$

و $\varphi(x\ker f) = f(x) = z$. مما سبق $G/\ker f \cong Im f$.

يتبع في خلف الصفحة

(3) ليكن $a\in R$ عنصراً غير قابل القلب من اليسار عندئذٍ $Ra\neq R$ لأنه إذا كان $Ra=R$ فإنه يوجد $b\in R$ بحيث $ba=1$ ومنه a قابل القلب من اليسار في R فيكون Ra مثالية يسارية في R فإنه توجد مثالية يسارية أعظمية M في R تحوي Ra أي أن $a\in Ra\subseteq M$.

(4) لتكن B مثالية يسارية عديمة القوى في R عندئذٍ يوجد $n\in N^*$ بحيث $B^n=0$ من جهة أخرى، ليكن $b\in B$ عندئذٍ $b^n=bb\ldots b\in B^n=0$ ومنه كل عنصر من B عديم القوى أي المثالية اليسارية B عديمة.

(5) لتكن A مثالية يسارية صغيرة في R ولنفرض جدلاً أن $A\not\subseteq J(R)$ عندئذٍ توجد مثالية يسارية أعظمية M في R بحيث $A\not\subseteq M$ ومنه $M\subset A+M$ ولكون M أعظمية فإن $A+M=R$ وبما أن A صغيرة في R ينتج أن $M=R$ وهذا يناقض كون M أعظمية في R. إذاً $A\subseteq J(R)$.

الجواب الثالث [15 درجات]

1- نقول عن R إنها حلقة اقليدية إذا تحقق ما يلي:

a) R منطقة تكاملية.

b) يوجد تطبيق $\varphi: R^*\to N$ يحقق: إذا كان $a,b\in R^*$ فإن $\varphi(a)\leq\varphi(ab)$ حيث $R^*=R\setminus\{0\}$ (3)

c) لأجل أي عنصرين $a,b\in R$ حيث $b\neq 0$ يوجد $q,r\in R$ يحققان $a=bq+r$ حيث إما $r=0$

2) Z اقليدية: Z منطقة تكاملية. لنعرف العلاقة $\varphi: Z^*\to N$ كما يلي: إذا كان $m\in Z^*$ فإن $\varphi(m)=|m|$ نجد φ تطبيق ويحقق إذا كان $a,b\in Z^*$ فإن $\varphi(ab)=|ab|=|a||b|\geq|a|=\varphi(a)$. ليكن $a,b\in Z,\ b\neq 0$، حسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in Z$ حيث $a=bq+r$ و $0\leq r<|b|$ ومنه إما $r=0$ أو $0<r<|b|$ ومنه $r=|r|<|b|$. أي إما $r=0$ أو $\varphi(r)<\varphi(b)$ ⇐ Z اقليدية (7)

انتهت الأجوبة

د. إيمان الخوجه
أ. [توقيع]